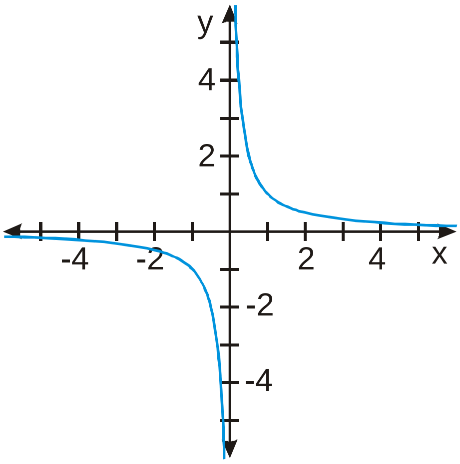
7.5.16 Hyperbola

Předpoklady: 7507, 7512

Pedagogická poznámka: Na první pohled se nezdá, že by hodina byla příliš zaplněná, ale kreslení obrázků studentům (spíše studentkám) docela trvá. Je dobré vysvětlit, že ne každý obrázek v učebnici, musí mít zvlášť i v sešitě a hlavně, že lepší je trochu ledabylý obrázek se vším, co má obsahovat, než nehotová superkresba. Já osobně beru kreslení obrázků jako nácvik schopnosti rozlišovat podstatné a nepodstatné věci.

Hyperbola – po elipse a parabole třetí (a poslední) typ kuželosečky.

Hyperbolu už známe jako graf funkce $y = \frac{1}{x}$



Jak souvisí hyperbola s našimi definicemi kuželoseček pomocí vzdáleností?

Př. 1: Vypočti libovolný bod ležící na hyperbole dané funkcí $y = \frac{1}{x}$ a pomocí kalkulačky ověř, že absolutní hodnota z rozdílu jeho vzdáleností od bodů $F\left[\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ a $E\left[-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right]$ se rovná $2\sqrt{2}$.

Například pro $x = 1$ platí: $y = \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ bod $K[1;1]$ je bodem hyperboly.

Určujeme vzdálenosti:

- $|KF| = \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2 + \left(1-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1-2\sqrt{2}+2+1-2\sqrt{2}+2} = \sqrt{6-4\sqrt{2}} \doteq 0,5858$
- $|KE| = \sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1+2\sqrt{2}+2+1+2\sqrt{2}+2} = \sqrt{6+4\sqrt{2}} \doteq 3,4142$

$2\sqrt{2} \doteq 2,8284 = 3,4142 - 0,5858$

Zkusíme ještě jeden bod:

Například pro $x = \frac{2}{3}$ platí: $y = \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ bod $L\left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right]$ je bodem hyperboly.

Určujeme vzdálenosti (rovnou počítáme na kalkulačce):

- $|LF| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^2} \doteq 0,7525$
- $|LE| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}+\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)^2} \doteq 3,5809$

$2\sqrt{2} \doteq 2,8284 = 3,5809 - 0,7525$

Pro oba zvolené body vztah pro vzdálenosti platí.

Pedagogická poznámka: Téměř nezbytnou podmínkou pro vyřešení předchozího příkladu je schopnost zadat do kalkulačky výraz najednou. Milovníci mezivýpočtů si užijí. Při výuce ve třídě počítáme vždy alespoň šest různých bodů.

Př. 2: (BONUS) Ukaž, že graf funkce $y = \frac{1}{x}$ je totožný s množinou všech bodů, jejichž absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od bodů $F\left[\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ a $E\left[-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right]$ se rovná $2\sqrt{2}$.

Při výpočtu vzdáleností budeme určitě dostávat komplikované výrazy $\Rightarrow$ zatím nebudeme dosazovat do rovnice pro $y = \frac{1}{x}$ a dosadíme pouze $X[x;y]$.

Podmínka: $\big||XF| - |XE|\big| = 2\sqrt{2}$.

$\left|\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)^2 + \left(y+\sqrt{2}\right)^2}\right| = 2\sqrt{2}$ na obou stranách kladná čísla $\Rightarrow$ můžeme umocnit $\Rightarrow$

$$\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)^2 + \left(y+\sqrt{2}\right)^2} + \left(x+\sqrt{2}\right)^2 + \left(y+\sqrt{2}\right)^2 = 8$$

Levou stranu si rozdíl na dva výrazy, které budeme upravovat zvlášť:

- $\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 + \left(x+\sqrt{2}\right)^2 + \left(y+\sqrt{2}\right)^2 =$
  $x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 + y^2 - 2y\sqrt{2} + 2 + x^2 + 2x\sqrt{2} + 2 + y^2 + 2y\sqrt{2} + 2 = 2x^2 + 8 + 2y^2$
- $2\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)^2 + \left(y+\sqrt{2}\right)^2} =$
  $2\sqrt{\left[\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2\right] \cdot \left[\left(x+\sqrt{2}\right)^2 + \left(y+\sqrt{2}\right)^2\right]}$

Dále budeme upravovat jenom výraz pod odmocninou:

$$\left[x^2-2x\sqrt{2}+y^2-2y\sqrt{2}+4\right]\cdot\left[x^2+2x\sqrt{2}+y^2+2y\sqrt{2}+4\right]=$$
$$x^4-2x^3\sqrt{2}+x^2y^2-2x^2y\sqrt{2}+4x^2+$$
$$2x^3\sqrt{2}-8x^2+2xy^2\sqrt{2}-8xy+8x\sqrt{2}+$$
$$x^2y^2-2xy^2\sqrt{2}+y^4-2y^3\sqrt{2}+4y^2+$$
$$2x^2y\sqrt{2}-8xy+2y^3\sqrt{2}-8y^2+8y\sqrt{2}+$$
$$4x^2-8x\sqrt{2}+4y^2-8y\sqrt{2}+16=x^4+2x^2y^2-16xy+y^4+16=$$
$$x^4+2x^2y^2+y^4+16(1-xy)=\left(x^2+y^2\right)^2+16(1-xy)$$

Dosadíme pod odmocninu:

$$2\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2+16(1-xy)}$$

Dosadíme do rovnice:

$$2x^2+8+2y^2-2\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2+16(1-xy)}=8$$
$$2x^2+2y^2=2\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2+16(1-xy)} \quad /:2$$

$x^2+y^2=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2+16(1-xy)}$ obě strany rovnice jsou kladné $\Rightarrow$ umocníme:

$$\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^2+y^2\right)^2+16(1-xy)$$
$$0=16(1-xy)$$
$$xy=1$$

$y=\frac{1}{x}$ získali jsme rovnici hyperboly $\Rightarrow$ vztah pro vzdálenosti platí.

Pedagogická poznámka: Obecný důkaz definice je označen jako BONUS schválně. Je časově náročnější a pro studenty méně přesvědčivý než, když si v příkladu 1 sami spočítají konkrétní vzdálenosti.

Př. 3: Na základě výsledků příkladu 1 zformuluj planimetrickou definici hyperboly. Při formulaci využij planimetrickou definici elipsy.

V rovině jsou dány dva různé body *E, F*. Množina všech bodů *X* roviny, pro které se $\left||EX|-|FX|\right|$ rovná danému kladnému číslu, které je menší než $|EF|$, se nazývá hyperbola. Body *E, F* se nazývají ohniska hyperboly.

Př. 4: Porovnej definici hyperboly a definici elipsy a vysvětli příčinu rozdílů.

Definice elipsy:
V rovině jsou dány dva body *E*, *F*. Množina všech bodů *X* roviny, pro které se součet $d=|EX|+|FX|$ vzdáleností bodů *X* od bodů *E*, *F* rovná danému číslu většímu než $|EF|$, se nazývá elipsa. Body *E*, *F* se nazývají ohniska elipsy.
Rozdíly:

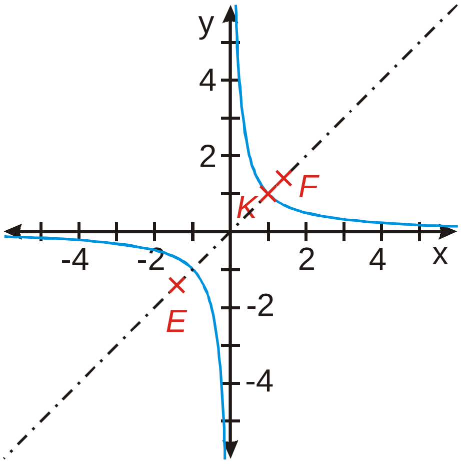
- U hyperboly je požadavek na různost bodů *E*, *F* $\Rightarrow$ kdyby body *E*, *F* splynuly do jednoho, všechny body roviny by od nich měly stejnou vzdálenost $\Rightarrow$ rozdíl by vyšel nulový. U elipsy splynutí nevadí, dostaneme kružnici, která je jejím speciálním případem.

- Jiný výraz spočtený ze vzdáleností od ohnisek – jasné, jde o jinou křivku.
- Číslo získané z výpočtu musí být u hyperboly menší než vzdálenost ohnisek $\Rightarrow$ jinak by mezi body hyperboly nenáležel žádný bod mezi ohnisky (u elipsy musí být součet vzdáleností větší než vzdálenost ohnisek, jinak by podmínku nesplňoval žádný bod roviny).

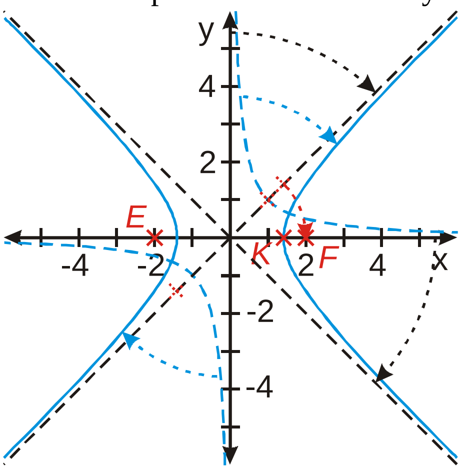
Pedagogická poznámka: S příkladem 3 příliš nečekám. Pro většinu studentů je nad jejich síly (a hlavně odvahu) a zamyšlení nad příkladem 4 je pro ně větším přínosem.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad sleduje dva cíle. Jednak jde o nácvik sestavování definic, kde by si studenti měli uvědomit, že každé slovo má svůj význam. Není nutné přeříkat definici doslova, ale je nutné ní obsáhnout všechny významy. Druhým cílem je zdůraznění podobnosti hyperboly a elipsy, která má význam zejména při přípravě na čtvrtletní práci, která shrnuje celou látku kuželoseček a logické zapamatování studentům přípravu může velice usnadnit.

Zkusíme podobně jako u elipsy prozkoumat vlastnosti hyperboly. Zdá se, hyperbola bude souměrná podle přímky *EF*.



Bohužel náš obrázek se značně liší od dosavadních obrázků všech kuželoseček – osa *EF* je nakřivo $\Rightarrow$ zkusíme ho natočit tak, aby odpovídal našim zkušenostem a byla vodorovná $\Rightarrow$ otočíme ho podle směru hodinových ručiček o $45°$.



Osa hyperboly (přímka *EF*) je nyní totožná s osou *x*.
Kromě hyperboly a bodů *E*, *F* a *K* jsme otočili i původní osy souřadnic, které se přetočili do přímek $y = x$ a $y = -x$. Hyperbola se k nim blíží, ale nikdy se jich nedotkne, nazýváme je **asymptoty hyperboly**.

Př. 5: Urči souřadnice bodů E, F a K po otočení,

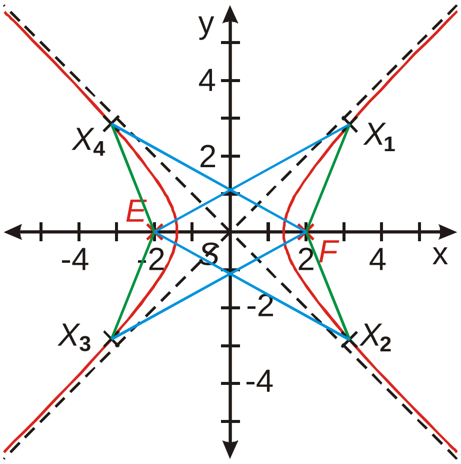
Při otočení se nemění vzdálenost od počátku, y-ové souřadnice otočených bodů jsou nulové $\Rightarrow x$-ové se rovnají vzdálenosti původních bodů od počátku.

$|KO| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow$ nové souřadnice bodu $K\left[\sqrt{2};0\right]$.

$|FO| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2 \Rightarrow$ nové souřadnice bodu $F[2;0]$.

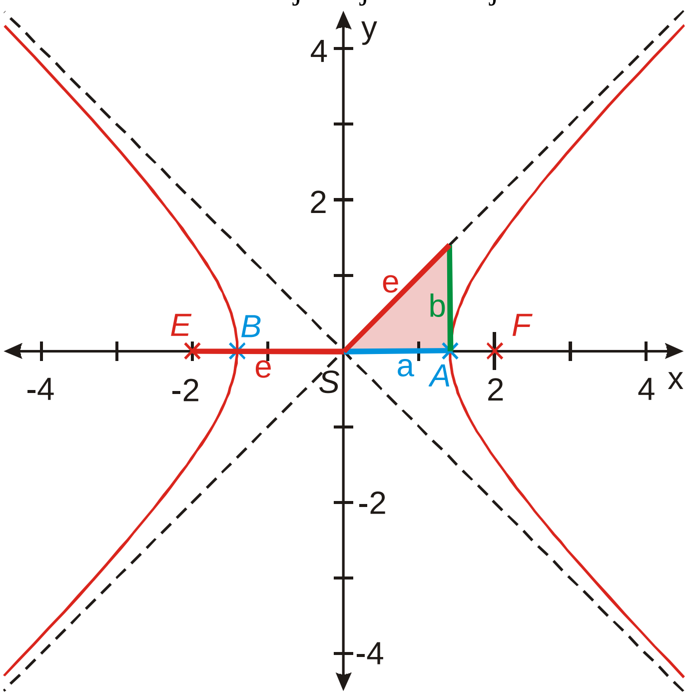
Bod E má souřadnice: $E[-2;0]$ (je s bodem F souměrný podle počátku).

Stejně jako u elipsy můžeme ke každému bodu hyperboly nají další tři, které jsou s ním buď osově nebo středově souměrné.



Pedagogická poznámka: Obrázek souměrností si studenti nekreslí. Následující obrázek promítnu, nechám studenty nakreslit a terminologii, poté sestavujeme společně.

Obrázek si nakreslíme ještě jednou a sjednotíme si terminologii:



Terminologie:

body E, F – ohniska hyperboly

přímka EF – hlavní osa hyperboly

osa úsečky EF – vedlejší osa hyperboly

bod S – střed hyperboly

body A, B – hlavní vrcholy hyperboly

- vzdálenost $|ES| = |FS| = e$ - výstřednost (excentricita) hyperboly
- vzdálenost $|AS| = |BS| = a$ - hlavní poloosa hyperboly
- vzdálenost b - vedlejší poloosa hyperboly

Jak se liší hyperbola od elipsy?
Hyperbola nemá vedlejší vrcholy, naopak má asymptoty.

Vedlejší poloosu uvádíme schválně (i když neexistují vedlejší vrcholy):

- S její pomocí můžeme snadno vyjádřit rovnice asymptot.
  Směrnice asymptoty je dána pravoúhlým trojúhelníkem s odvěsnami a, b $k = \pm \frac{b}{a} \Rightarrow$
  rovnice asymptot: $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$.
- Pro velikosti poloos a excentricitu platí podobný vztah jako u elipsy (opět je vidět z pravoúhlého trojúhelníku): $e^2 = a^2 + b^2$.

Př. 6: Urči u nakreslené hyperboly velikosti poloos a excentricitu. Ověř platnost vztahu $e^2 = a^2 + b^2$.

Z obrázku je vidět, že platí:

- $e = 2$ (x-ová souřadnice bodu F),
- $a = \sqrt{2}$ (x-ová souřadnice bodu A),

  $b = \sqrt{2}$ (asymptotou je přímka $y = x$ a vyznačený trojúhelník je tedy rovnoramenný).

Dosadíme do vztahu $e^2 = a^2 + b^2$: $2^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 4 = 4$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad není zbytečný. Jak už to v podobných příkladech bývá, teprve při řešení příkladu vezmou mnozí na vědomí to, co si před chvilkou zapisovali a pracně zjišťují, kde mají tu excentricitu najít.

Hyperbolu, pro kterou platí $a = b$ (poloosy jsou shodné), nazýváme **rovnoosá hyperbola**.

Pouze rovnoosé hyperboly otočené o $45°$ je možné zapsat jednoduchou rovnicí $y = \frac{k}{x}$.

Pedagogická poznámka: Není nutné stihnout následující příklad. Začátek příští hodiny obsahuje dva podobné, které jsou využité dalším průběhu hodiny.

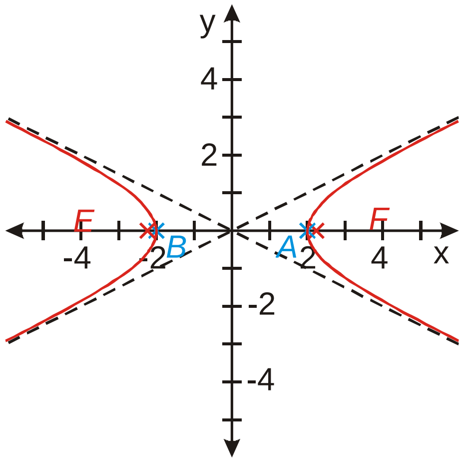
Př. 7: Nakresli obrázek, vypočti souřadnice vrcholů, excentricitu a urči rovnice asymptot hyperboly se středem v počátku soustavy souřadnic, pokud je její hlavní osa totožná s osou x a platí pro ni $a=2$, $b=1$.

$e=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+1^2}\Rightarrow e=\sqrt{5}$

Vrcholy: $A[2;0]$, $B[-2;0]$.

Ohniska: $E\left[-\sqrt{5};0\right]$, $F\left[\sqrt{5};0\right]$.

Rovnice asymptot: $y=\frac{1}{2}x$, $y=-\frac{1}{2}x$.



Pedagogická poznámka: Poměrně často se studenti snaží dělat asymptoty navzájem kolmé, další studenti mají problém je nakreslit.

Př. 8: Petáková:
strana 126/cvičení 41 a) c) d)

Shrnutí: Hyperbolu tvoří body, které mají konstantní rozdíl vzdáleností od ohnisek.